Udledning af deterministiske afkastforudsætninger til beregning af fraktiler for pensionsdepoter

Magnus Tor Ry Hessler, Metoder og Analyse, Danica Pension

26. marts 2018

I nærværende notat gives en kort opridsning af centrale resultater og antagelser, der er nødvendige for udledning af deterministiske afkast, der kan anvendes til beregning af fraktiler for et pensionsdepot, ved en deterministisk fremregning. Den beskrevne teknik er tiltænkt anvendt på produkter, hvor investeringsstrategien kan karakteriseres ved en deterministisk sammensætning af aktiver (eller aktivklasser), hvis udvikling kan beskrives som en (flerdimensionel) geometrisk brownsk bevægelse. Det beskrives ikke hvordan en given aftrapningskurve (eller investeringsprofil) omsættes til aftrapning af forventet afkast og volatilitet.

Indhold

1 Nødvendige matematiske resultater

Lad $S(t)$ være en geometrisk brownsk bevægelse, der opfylder

$$S(0) = s_0,\ dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma dW_t,$$

hvor W_t er en wienerproces. Dermed gælder for $t > s > 0$, at

$$\frac{S(t)}{S(s)} \overset{\mathcal{D}}{=} \exp\left((\mu - 0.5\sigma^2)(t-s) + \sigma\sqrt{t-s}N\right)$$

for $N \sim N(0;\,1)$. Definerer vi $R(s;\,t) = \frac{S(t)}{S(s)}$ ses det, at

$$\log R(s;\,t) \sim N\left((\mu - 0.5\sigma^2)(t-s);\, \sigma^2(t-s)\right).$$

Dermed følger det, at

$$\begin{aligned} E\left[R(s;\,t)\right] &= \exp\left(\mu(t-s)\right) \\ E\left[R(s;\,t)^2\right] &= \exp\left((2\mu + \sigma^2)(t-s)\right) \\ \text{Var}\left[R(s;\,t)\right] &= \exp\left(2\mu(t-s)\right)\left(\exp\left(\sigma^2(t-s)\right) - 1\right) \end{aligned}$$

2 Depotudvikling

Det ønskes at beskrive fordelingen af et pensionsdepot til en række tidspunkter $t_0, t_1, \ldots, t_N$. Ses der bort fra ind- og udbetalinger antages det, at pensionsdepotet mellem to tidspunkter t_{n-1} og t_n udvikler sig som en geometrisk brownsk bevægelse med parametre $\mu\left(t_{n-1};\, t_n\right)$ og $\sigma\left(t_{n-1};\, t_n\right)$. Således kan vi beskrive depotudviklingen som

$$X(t_n) = X(t_{n-1}) R\left(t_{n-1};\, t_n\right),$$

hvor

$$R\left(t_{n-1};\, t_n\right) \sim \log N\left(\left(\mu\left(t_{n-1};\, t_n\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(t_{n-1};\, t_n\right)^2\right)(t_n - t_{n-1}); \sigma\left(t_{n-1};\, t_n\right)^2 (t_n - t_{n-1})\right),$$

og hvor vi for $\log X = a + bY, Y \sim N(0;\, 1)$ anvender notationen $X \sim \log N(a; b^2)$.

Antages det, at der umiddelbart inden tid t_n indbetales $I(t_n)$ og at der umiddelbart efter tid t_n udbetales

$$U(t_n) = \frac{X(t_n)}{A(t_n)},$$

hvor $A(t_n)$ angiver et udbetalingspassiv (eller nutidsværdien af en annuitet om man vil), kan vi med notationen

$$F(t_n) = 1 - \frac{1}{A(t_n)}$$

skrive depotværdien til tid t_n, efter indbetaling af præmie, inden udbetaling af ydelse, som

$$X(t_n) = X(t_{n-1}) F(t_{n-1}) R(t_{n-1}\, t_n) + I(t_n). \tag{1}$$

$F(t_n)$ angiver den relative del af depotet der er tilbage efter den udbetaling der falder til tid t_n og notationen anvendes her for at få et simpelt udtryk for udviklingen af X, der samtidig giver mulighed for anvendelse på pensionsaftaler, der indeholder forskellige udbetalingsformer (F kan således både karakterisere sumudbetalinger, rateudbetalinger og livrenter, eller en kombination af disse). For tidspunkter efter ophør af præmiebetaling bliver I lig 0 og for tidspunkter inden pensionering bliver F lig 1.

2.1 Middelværdi og varians for fremtidige depotværdier

Det ønskes at fastlægge middelværdi og varians for depotværdien til hvert tidspunkt t_n, og vi anvender notationen

$$M(t_n) = E[X(t_n)],\ V(t_n) = \mathrm{Var}\left(X(t_n)\right).$$

Forudsætter vi, at I og F er deterministiske, ser vi ud fra ligning (1), at

$$\begin{aligned} E[X(t_n)] &= E\left[X(t_{n-1})\right] F(t_{n-1}) E\left[R(t_{n-1}, t_n)\right] + I(t_n) \\ &= E\left[X(t_{n-1})\right] F(t_{n-1}) \exp\left(\mu(t_{n-1}; t_n)(t_n - t_{n-1})\right) + I(t_n) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} E\left[X(t_n)^2\right] &= E\left[X(t_{n-1})^2\right] F(t_{n-1})^2 E\left[R(t_{n-1}, t_n)^2\right] + I(t_n)^2 + 2E\left[X(t_{n-1})\right] F(t_{n-1}) E\left[R(t_{n-1}, t_n)\right] I(t_n) \\ &= E\left[X(t_{n-1})^2\right] F(t_{n-1})^2 \exp\left(\left(2\mu(t_{n-1}; t_n) + \sigma(t_{n-1}; t_n)^2\right)(t_n - t_{n-1})\right) + I(t_n)^2 \\ &\quad + 2E\left[X(t_{n-1})\right] F(t_{n-1}) \exp\left(\mu(t_{n-1}; t_n)(t_n - t_{n-1})\right) I(t_n) \end{aligned}$$

Dermed bliver

$$M(t_n) = M(t_{n-1})F(t_{n-1})e^{\mu(t_{n-1};t_n)(t_n-t_{n-1})} + I(t_n)$$

og

$$V(t_n) = F(t_{n-1})^2 e^{2\mu(t_{n-1};t_n)(t_n-t_{n-1})} \left(\left(V(t_{n-1}) + M(t_{n-1})^2 \right) e^{\sigma(t_{n-1};t_n)^2(t_n-t_{n-1})} - M(t_{n-1})^2 \right)$$

Da $X(t_0)$ antages at være kendt, kan vi ud fra randbetingelsen

$$M(t_0) = X(t_0),\ V(t_0) = 0,$$

beregne $M(t_n)$ og $V(t_n)$ iterativt for alle $n \in \{1, \dots N\}$.
Hvis F derimod ikke er deterministisk og $A(t_n)$ eksempelvis afhænger af $X(t_n)$, vil vi ikke på ligeså simpel vis kunne udlede formler for middelværdi og varians af $X(t_n)$.

3 Udledning af fraktiler under lognormal-approksimation

Jf. Claus Munks notat 'En hurtig approksimativ beregning af usikkerheden om den fremtidige pension', kan den sande fordeling af $X(t_n)$ approksimeres med en lognormalfordeling. Under denne approksimation og med notationen

$$a(t_n) = \log M(t_n),\ b(t_n)^2 = \log \left(1 + V(t_n)e^{-2a(t_n)} \right)$$

kan p-fraktilen for $X(t_n)$, her noteret $x_p(t_n)$, jf. ligning (10) i Munks notat beregnes som

$$x_p(t_n) = \exp \left(b(t_n)N^{-1}(p) + a(t_n) - \frac{1}{2}b(t_n)^2 \right),$$

hvor $N^{-1}(p)$ angiver $p-$fraktilen i en standardnormalfordeling.

Ved beregning af pensionsprognoser i praksis, vil det ofte være ønskværdigt at kunne lave beregningen på baggrund af et deterministisk, evt. tidsafhængigt, afkast. Defineres

$$r_p(t_{n-1};\, t_n) = \frac{x_p\left(t_n\right) - I\left(t_n\right)}{x_p\left(t_{n-1}\right) F\left(t_{n-1}\right)} - 1,$$

kan fraktilerne for pensionsdepotet på fremtidige tidspunkter beregnes som

$$x_p\left(t_n\right) = x_p\left(t_{n-1}\right) F\left(t_{n-1}\right) \left(1 + r_p(t_{n-1};\, t_n)\right) + I\left(t_n\right)$$

NB: Ovenfor er beskrevet et meget simpelt pensionsprodukt, hvor der ikke er taget højde for eksempelvis PAL, omkostninger, betaling for forsikringsdækninger med videre. Disse effekter vil være svære (grænsende til umulige) at indregne korrekt i formlerne for middelværdi og varians i afsnit 2 (eksempelvis fordi PAL påvirker depotudviklingen asymmetrisk og særdeles stiafhængigt og omkostninger ofte ikke er lineære). Da disse forhold typisk kun i beskeden grad påvirker rangordningen af depotværdier som udfald af investeringerne, giver det en forholdsvis præcis beregning af fraktiler for depotet, at lave en deterministisk fremregning (med korrekt kontoteknik) med afkast lig $\left\{r_p(t_{n-1};\, t_n)\right\}_{(n=1,\dots,N)}$.

NB: Ovenstående beskrivelse tager udgangspunkt i generiske tidspunkter $t_0, t_1, \dots, t_N$. Disse kan eksempelvis udtrykke månedlige eller årlige tidsskridt (eller en blanding). Har man valgt

$t_i = i/12$ (månedlige tidsskridt) vil det gælde (hvis der ikke falder nogle betalinger mellem tid 0 og 1), at

$$1 + r_p(0;\,1) = \prod_{i=1}^{12} (1 + r_p(t_{i-1};\,t_i))$$

Omvendt kan man ikke generelt omregne årlige forrentninger til månedlige forrentninger. Så i praksis vil det formentlig være nemmest at regne med månedlige tidsskridt og derefter aggregere de relevante renter (medmindre man altid kun vil regne i årlige tidsskridt).

NB: I ovenstående antages, at udbetalingen fastlægges på samme tidspunkt som den udbetales. I praksis ses ofte, at udbetalingen fastlægges årligt, men udbetales månedligt. Dermed vil der eksempelvis for en ratepension være positiv sandsynlighed for at depotet bliver 0 inden sidste udbetaling i virkeligheden, hvorimod sandsynligheden for dette er lig 0 i modellen.

NB: I ovenstående antages det, at $\mu\,(t_{n-1};\,t_n)$ og $\sigma\,(t_{n-1};\,t_n)$ er konstant mellem t_{n-1} og t_n. Er der eksempelvis investeret i et miks af en offensiv fond og en defensiv fond, vil $\mu\,(t_{n-1};\,t_n)$ og $\sigma\,(t_{n-1};\,t_n)$ kun være konstante, hvis der kontinuert rebalanceres til det initiale forhold mellem den offensive fond og den defensive fond.