En hurtig approksimativ beregning af usikkerheden om den fremtidige pension

Claus Munk*

1. september 2017

1 Sammenfatning

Den pension, som en pensionsopsparer (en kunde) ender med at få, er usikker både på grund af usikkerhed om opsparerens fremtidige indbetalinger og usikkerhed om afkastet på den investerede opsparing – samt usikkerhed om opsparerens levetid. Dette notat fokuserer på den effekt afkastusikkerheden har på de fremtidige pensionsudbetalinger. Derfor antages indbetalingerne igennem opsparingsfasen at være kendte. I udbetalingsfasen indregnes en deterministisk aldersafhængig dødelighedsrate. Formålet med analysen er at bestemme fordelingen af pensionsudbetalingen til kunden hvert år i udbetalingsfasen forudsat at kunden lever så længe. Specielt er vi interesseret i nedre fraktiler af fordelingen for at kunne give kunden et billede af "hvor galt det kan gå."

Analysen kræver naturligvis antagelser om fordelingen af investeringsafkastene i de enkelte år. Uanset hvilke gængse og nogenlunde rimelige antagelser der gøres om afkastfordelingerne, er det imidlertid ikke muligt analytisk at bestemme fordelingen af kundens formue på ethvert fremtidige tidspunkt og dermed heller ikke fordelingen af pensionsudbetalingen i et givet år. Fordelingerne og de ønskede fraktiler kan estimeres via relativt tidskrævende simulationsberegninger. Dette notat foreslår og diskuterer en analytisk approksimation, der er betydeligt hurtigere at bruge.

Konklusioner

1. Approksimationen synes generelt at være tilstrækkelig nøjagtig.
2. Approksimationen giver nedre fraktiler (5% og 10%), der er lavere end de sande fraktiler, og dermed er approksimationen til "den forsigtige side."
3. For relativt unge kunder med en aggressiv investeringsstrategi giver approksimationen relativt unøjagtige nedre fraktiler.
4. Anvendelsen af approksimationen vil straffe usikre investeringsstrategier ved at give et mere pessimistisk billede af hvor galt det kan gå.

*Professor, Institut for Finansiering og PeRCent, begge ved Copenhagen Business School. E-mail: cm.fi@cbs.dk. Internet: https://sites.google.com/site/munkfinance/

2 Modelramme

Vi har brug for at introducere lidt notation og antagelser. For at simplificere analysen en smule antager vi, at ind- og udbetalinger sker ved udgangen af hvert år, ligesom afkast kun tilskrives ved årets udgang. Desuden antager vi, at kunden har fødselsdag 1. januar. Vi lader t betegne det år, hvor kunden er t år gammel. Vi starter analysen ved udgangen af år $t_0 = 24$, og antager at kunden går på pension ved udgangen af år $T_R = 66$ og maksimalt bliver $T = 110$ år gammel. Vi lader W_t være kundens opsparingsformue ved udgangen af år t, I_t er indbetalingerne i (ved udgangen af) år t, mens R_t er bruttoafkastet på den investerede formue i år t. Ved slutningen af hvert år betales en skat lig andelen $\tau = 0{,}153$ af årets afkast.

Kundens initiale opsparing, altså ved udgangen af år t_0, betegnes med W_{t_0}. For en nyoprettet opsparing vil dette være lig den første indbetaling $W_{t_0} = I_{t_0}$. Formuen udvikler sig derefter som følger igennem opsparingsfasen:

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_t + W_t\left(R_{t+1} - 1\right)\left(1 - \tau\right) + I_{t+1} \\ &= I_{t+1} + W_t\left(\tau + R_{t+1}\left(1 - \tau\right)\right) \\ &= I_{t+1} + W_t\tau + W_t R_{t+1}\left(1 - \tau\right), \quad t = t_0, t_0 + 1, \ldots, T_R - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Vi antager som sagt at indbetalingerne $I_{t_0+1}, \ldots, I_{t_0+2}, \ldots, I_{T_R}$ kendes på forhånd. For eksempel kunne man antage en konstant vækstrate g, således at

$$I_{t+1} = I_t(1 + g), \quad t = t_0, t_0 + 1, \ldots, T_R - 1. \tag{2}$$

Bemærk at den sidste indbetaling I_{T_R} sker umiddelbart inden kunden går på pension.

Pensionsudbetalingerne antages at ske ved slutningen af hvert år $T_R + 1, T_R + 2, \ldots, T$ i form af en *variabel annuitet* på følgende måde. Ved begyndelsen af hvert år $t > T_R$ fastsættes den pensionsudbetaling U_t, som kunden modtager ved årets slutning. Beløbet beregnes som en livrente med en given rente r_{var}. Vi lader $e^{-\nu(t+1)}$ betegne sandsynligheden for at personen overlever år $t + 1$ givet at hun var i live ved slutningen af år t, så $\nu(t + 1)$ betegner dødelighedsraten. Vi bruger som udgangspunkt Finanstilsynets benchmark for den observerede nuværende dødelighed for kvinder i 2015. Udbetalingen ved slutningen af år t (betinget af overlevelse) bliver dermed

$$U_t = \frac{W_{t-1}}{A(t-1)}, \quad A(t-1) = \sum_{k=1}^{T-(t-1)} \exp\left\{-\sum_{s=t}^{t-1+k} \left(r_{\text{var}} + \nu(s)\right)\right\}. \tag{3}$$

Ved slutningen af året udbetales det lovede beløb og opsparingen opskrives med afkastet på porteføljen. Opsparingen fra ikke-overlevende kunder overføres til de overlevende kunder.

Formueudviklingen er derfor

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= e^{\nu(t+1)} W_t \left(\tau + R_{t+1}(1-\tau)\right) - U_{t+1} \\ &= W_t \left\{ e^{\nu(t+1)} \left(\tau + R_{t+1}(1-\tau)\right) - A(t)^{-1} \right\} \\ &= W_t \left(e^{\nu(t+1)} \tau - A(t)^{-1} \right) + W_t R_{t+1} e^{\nu(t+1)} (1-\tau), \quad t = T_R, T_R+1, \ldots, T-2, \end{aligned} \tag{4}$$

hvor det antages at afkastet fortsat beskattes med τ. Den sidste pensionsudbetaling sker ved udgangen af år $T = 110$ og fastsættes til $U_T = e^{\nu(T)} W_{T-1}$.

Da $A(t-1)$ antages deterministisk, følger fordelingen af udbetalingen U_t direkte af fordelingen af formuen W_{t-1}, som vi derfor kan fokusere på. Formuen på et givet fremtidigt tidspunkt vil afhænge af de realiserede afkast indtil da. I finansieringslitteraturen antages bruttoafkastene R_{t+1} typisk at være enten normalfordelte eller lognormalfordelte. Uanset hvilken af disse antagelser, der laves, vil fordelingen af den fremtidige formue imidlertid ikke være kendt. Hvis vi f.eks. itererer (1), får vi

$$\begin{aligned} W_{t+2} &= I_{t+2} + W_{t+1} \left(\tau + R_{t+2}(1-\tau)\right) \\ &= I_{t+2} + \left\{ I_{t+1} + W_t \left(\tau + R_{t+1}(1-\tau)\right)\right\} \left(\tau + R_{t+2}(1-\tau)\right) \\ &= I_{t+2} + I_{t+1} \left(\tau + R_{t+2}(1-\tau)\right) + W_t \left(\tau + R_{t+2}(1-\tau)\right)\left(\tau + R_{t+1}(1-\tau)\right). \end{aligned}$$

Uanset om R_{t+1} og R_{t+2} antages normal- eller lognormalfordelte, vil W_{t+2} set fra tidspunkt t hverken være normal- eller lognormalfordelt, da udtrykket involverer både summer og produkter med afkastene. (I tilfældet uden løbende indbetalinger og ingen skat vil lognormalfordelte afkast dog give en lognormalfordelt formue.)

3 Beregning af eksakt middelværdi og varians

Lad $M(t)$ og $V(t)$ betegne henholdsvis middelværdien og variansen af formuen ved udgangen af år t beregnet med det vi ved på tid t_0, dvs.

$$M(t) = \mathrm{E}_{t_0}[W_t], \quad V(t) = \mathrm{Var}_{t_0}[W_t]$$

med startværdierne

$$M(t_0) = W_{t_0}, \quad V(t_0) = 0.$$

Vi antager herefter, at afkastene er lognormalfordelte

$$\ln R_{t+1} \sim N\left(\mu(t+1) - \frac{1}{2}\sigma^2(t+1), \sigma^2(t+1)\right),$$

og at afkastene er uafhængige over tid – hvilket medfører at afkastet R_{t+1} er uafhængigt af formuen W_t. Specielt bliver

$$\mathrm{E}[R_{t+1}] = e^{\mu(t+1)}, \quad \mathrm{E}\left[(R_{t+1})^2\right] = e^{2\mu(t+1)+\sigma^2(t+1)}.$$

Det vises i Appendix A, at middelværdien og variansen så kan bestemmes rekursivt som følger. I indbetalingsfasen, dvs. for $t = t_0, t_0 + 1, \ldots, T_R - 1$, er

$$M(t+1) = I_{t+1} + M(t)\left(\tau + (1-\tau)\, e^{\mu(t+1)}\right), \tag{5}$$

$$V(t+1) = V(t)\left(\tau + (1-\tau)\, e^{\mu(t+1)}\right)^2 + (1-\tau)^2 \left(V(t) + M(t)^2\right) e^{2\mu(t+1)} \left(e^{\sigma^2(t+1)} - 1\right). \tag{6}$$

I udbetalingsfasen, dvs. for $t = T_R, T_R + 1, \ldots, T - 2$ er

$$M(t+1) = M(t)\left(e^{\nu(t+1)}\left[\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right] - A(t)^{-1}\right), \tag{7}$$

$$V(t+1) = V(t)\left(e^{\nu(t+1)}\left[\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right] - A(t)^{-1}\right)^2 + (1-\tau)^2 \left(V(t) + M(t)^2\right) e^{2\mu(t+1)+2\nu(t+1)} \left(e^{\sigma^2(t+1)} - 1\right). \tag{8}$$

For at få et eksplicit udtryk (uden rekursive beregninger) vil vi skulle lave den ganske rimelige antagelse, at indbetalingerne vokser med konstant rate g ligesom i (2), men også den skrappe antagelse, at porteføljemomenterne $\mu(t)$ og $\sigma^2(t)$ er konstante over tid – altså at porteføljen holdes konstant igennem livet. Under disse forudsætninger kan middelværdien i indbetalingsfasen eksplicit beregnes til

$$M(t) = W_0\left(\tau + (1-\tau)e^{\mu}\right)^{t-t_0} + \frac{1+g}{\tau + (1-\tau)e^{\mu} - (1+g)}\left(\left(\tau + (1-\tau)e^{\mu}\right)^{t-t_0} - (1+g)^{t-t_0}\right), \tag{9}$$

men et eksplicit udtryk for variansen ville blive ekstremt kompliceret. De rekursive beregninger er at foretrække.

Vi er specielt interesseret i

(i) fordelingen af formuen ved indgangen til pensionsperioden, dvs. formuen W_{T_R} ved udgangen af år T_R, som vil have middelværdi $M(T_R)$ og varians $V(T_R)$,

(ii) fordelingen af pensionsudbetalingen U_{T_R+K} ved udvalgte alderstrin $T_R + K$, og idet $U_{T_R+K} = W_{T_R+K-1}/A(T_R + K - 1)$ har udbetalingen middelværdi $M(T_R + K - 1)/A(T_R + K - 1)$ og varians $V(T_R + K - 1)/A(T_R + K - 1)^2$.

4 Approksimation af fordelingen af den fremtidige pension

Ideen er at approksimere en stokastisk variabel X med ukendt fordeling men kendt middelværdi m og kendt varians v med en lognormalfordelt variabel med samme middelværdi og varians. Approksimationen er således at sige, at $\ln X \sim N\left(a - \frac{1}{2}b^2, b^2\right)$, hvilket medfører, at

$$\mathrm{E}[X] = e^{a}, \quad \mathrm{Var}[X] = e^{2a}\left(e^{b^2} - 1\right),$$

og for at matche en middelværdi på m og en varians på v sætter vi a og b^2 til

$$a = \ln m, \quad b^2 = \ln\left(1 + ve^{-2a}\right).$$

Vi er interesseret i udvalgte fraktiler i fordelingen for X. Som altid er p-fraktilen defineret som tallet x_p, der opfylder

$$\text{Prob}(X < x_p) = p.$$

Anvendes lognormal-approksimationen er

$$p = \text{Prob}(X < x_p) = \text{Prob}(\ln X < \ln x_p) = N\left(\frac{\ln x_p - \left(a - \frac{1}{2}b^2\right)}{b}\right),$$

hvor $N(\cdot)$ er fordelingsfunktionen for en standard normalfordelt stokastisk variabel. Derfor bliver

$$\frac{\ln x_p - \left(a - \frac{1}{2}b^2\right)}{b} = N^{-1}(p)$$

og dermed

$$x_p = \exp\left\{bN^{-1}(p) + a - \frac{1}{2}b^2\right\}. \tag{10}$$

5 Test af approksimationens præcision

Vi betragter som udgangspunkt en kunde, der starter opsparingen ved udgangen af år 24 med en indbetaling på 45 tusinde kroner (tkr), svarende til 15% af en årsløn på 300 tkr. Indbetalingerne antages at vokse realt med 1% om året. Kunden går på pension som 67-årig. Vi ser på kundens formue ved udgangen af år 66 samt udbetalingen i år 67, 77 og 87. Både de forventede værdier, standardafvigelserne og fraktilerne afhænger naturligvis af investeringsstrategien. Her ser vi på to strategier, der kombinerer aktier og obligationer på forskellig vis:

(I) **Aggressiv strategi** hvor aktieandelen er 100% indtil år 45, hvorfra den lineært nedtrappes til 50% i år 65 og fastholdes derefter.

(II) **Forsigtig strategi** hvor aktieandelen er 50% indtil år 45, hvorfra den lineært nedtrappes til 25% i år 65 og fastholdes derefter.

Vi antager, at obligationer giver et sikkert afkast på 1%, mens aktier har et forventet afkast på 5% og en volatilitet på 16%. Alle størrelser er i reale termer og per år. Bruttoafkastet på porteføljen i år t antages således at være lognormalfordelt med $\mu(t) = w_t \times 5\% + (1 - w_t) \times 1\%$ og $\sigma(t) = w_t \times 16\%$, hvor w_t er aktieandelen i år t. I alle eksemplerne sættes annuitetsrenten i udbetalingsfasen til $r_{\text{var}} = 3\%$.

Tabel 1 viser resultaterne af 1 million simulerede stier, den lognormale approksimation og hvor meget approksimationen afviger fra simulationerne. Med den aggressive strategi er den gennemsnitlige formue ved indgangen til pensionsfasen 5296.7 tkr ifølge simulationerne, mens den eksakte middelværdi som approksimationen tager udgangspunkt i er 5293.3 tkr, en afvigelse på -0.1%. Standardafvigelsen fra simulationerne er også meget tæt på den eksakte værdi, som det forventes med så mange simulerede udfald. For de nedre fraktiler i formuefordelingen er approksimationen i dette tilfælde relativt unøjagtig. For 5%-fraktilen er approksimationen hele 11% under simulationerne, mens præcisionen er bedre for de øvrige viste fraktiler. Det samme mønster ses for udbetalingerne i år 67, 77 og 87.

Bemærk, at approksimationen altid undervurderer de nedre fraktiler, hvilket skyldes at den sande fordeling på grund af de løbende indbetalinger bliver mere sammenpresset end lognormalfordelingen. En sådan undervurdering betyder at approksimationens bud på "hvor galt det kan gå" er til den forsigtige side, hvilket kan være fornuftigt givet de mange usikkerhedsfaktorer beregningsmodellen ikke tager højde for.

Med den forsigtige strategi (nedre del af tabel 1) er approksimationen væsentlig mere nøjagtig. Selv for 5%-fraktilen er fejlen under 2%. Approksimationens nøjagtighed afhænger betydeligt af usikkerheden på den antagede investeringsstrategi. Brugen af approksimationen vil i en vis forstand straffe de mere usikre/aggressive strategier.

Uden de løbende indbetalinger (og afkast-beskatningen) ville approksimationen være eksakt. Jo større startformuen er i sammenligning med indbetalingerne, desto mere præcis vil approksimationen være. Tabel 2 viser resultaterne for en kunde, som nu er ved udgangen af år 44. Vi antager her at kundens udgangsposition som 24-årig var ligesom beskrevet ovenfor. For eksempel er indbetalingen i år 45 sat lig de 45 tkr opskrevet med 1% i hvert af årene siden år 24. Med den aggressive strategi vil den 24-årige ovenfor have en gennemsnitlig formue ved udgangen af år 44 på 1629.7 tkr. Med den forsigtige strategi vil den gennemsnitlige formue være 1353.2 tkr. Vi bruger nu disse værdier som startformuer for den 44-årige. Som vi kan se i tabel 2 bliver den gennemsnitlige slutformue og den gennemsnitlige årlige pension derfor stort set identisk med værdierne i tabel 1. Standardafvigelserne er naturligvis betydeligt lavere, da usikkerheden nu virker over en kortere årrække. Approksimationen er nu klart mere præcis. Med den aggressive strategi skyder approksimationen 4-5% under for 5%-fraktilen mod op til 11% i tabel 1. Med den forsigtige strategi er approksimationen yderst nøjagtig med alle fejl mindre end 1%.

	Formue			Pens 67			Pens 77			Pens 87		
	Simu	Aprx	Afvig	Simu	Aprx	Afvig	Simu	Aprx	Afvig	Simu	Aprx	Afvig
Aggressiv strategi												
Gnmsnit	5296.7	5293.3	-0.1%	355.1	354.9	-0.1%	338.1	337.9	-0.1%	321.1	320.9	0.0%
Std afv	2640.7	2633.9	-0.3%	177.0	176.6	-0.3%	190.9	190.3	-0.3%	203.0	202.6	-0.2%
5 pct	2457.5	2186.3	-11.0%	164.8	146.6	-11.0%	137.0	124.2	-9.4%	114.2	104.7	-8.3%
10 pct	2798.6	2593.7	-7.3%	187.6	173.9	-7.3%	160.6	150.3	-6.5%	137.2	129.2	-5.9%
25 pct	3526.2	3450.8	-2.1%	236.4	231.4	-2.1%	211.6	206.6	-2.4%	188.1	183.6	-2.4%
50 pct	4668.8	4739.1	1.5%	313.0	317.7	1.5%	291.9	294.4	0.9%	270.2	271.4	0.4%
75 pct	6334.4	6508.3	2.7%	424.7	436.3	2.7%	410.3	419.5	2.2%	394.0	401.1	1.8%
90 pct	8503.9	8659.0	1.8%	570.1	580.5	1.8%	566.3	576.9	1.9%	560.9	570.1	1.6%
Forsigtig strategi												
Gnmsnit	3813.3	3812.6	0.0%	255.7	255.6	0.0%	222.0	222.0	0.0%	191.4	191.4	0.0%
Std afv	799.3	797.8	-0.2%	53.6	53.5	-0.2%	53.5	53.5	-0.1%	52.1	52.1	-0.1%
5 pct	2705.1	2654.9	-1.9%	181.4	178.0	-1.9%	148.1	146.0	-1.4%	120.5	119.0	-1.2%
10 pct	2891.7	2862.2	-1.0%	193.9	191.9	-1.0%	160.5	159.2	-0.8%	132.1	131.2	-0.7%
25 pct	3243.8	3245.5	0.1%	217.5	217.6	0.1%	184.0	183.9	-0.1%	154.4	154.2	-0.1%
50 pct	3709.1	3731.8	0.6%	248.7	250.2	0.6%	214.9	215.8	0.4%	184.1	184.7	0.3%
75 pct	4267.6	4291.0	0.5%	286.1	287.7	0.5%	252.1	253.3	0.5%	220.3	221.2	0.4%
90 pct	4865.1	4865.6	0.0%	326.2	326.2	0.0%	292.3	292.6	0.1%	259.9	260.1	0.1%

Tabel 1: Startalder 24 år med formue på 45 tkr.

	Formue			Pens 67			Pens 77			Pens 87		
	Simu	Aprx	Afvig	Simu	Aprx	Afvig	Simu	Aprx	Afvig	Simu	Aprx	Afvig
Aggressiv strategi												
Gnmsnit	5296.7	5296.7	0.0%	355.1	355.1	0.0%	338.1	338.1	0.0%	321.2	321.1	0.0%
Std afv	2141.1	2138.3	-0.1%	143.5	143.4	-0.1%	161.6	161.4	-0.1%	177.4	177.0	-0.2%
5 pct	2722.5	2592.1	-4.8%	182.5	173.8	-4.8%	150.7	144.8	-3.9%	124.6	120.6	-3.2%
10 pct	3073.7	2985.1	-2.9%	206.1	200.1	-2.9%	175.2	170.7	-2.6%	148.5	145.4	-2.1%
25 pct	3797.8	3779.2	-0.5%	254.6	253.4	-0.5%	226.1	224.8	-0.6%	200.0	198.7	-0.6%
50 pct	4865.5	4911.6	0.9%	326.2	329.3	0.9%	303.2	305.1	0.6%	280.1	281.3	0.4%
75 pct	6307.8	6383.3	1.2%	422.9	428.0	1.2%	410.2	414.2	1.0%	395.2	398.1	0.7%
90 pct	8034.5	8081.4	0.6%	538.7	541.8	0.6%	542.5	545.3	0.5%	541.9	544.2	0.4%
Forsigtig strategi												
Gnmsnit	3813.4	3813.6	0.0%	255.7	255.7	0.0%	222.0	222.0	0.0%	191.5	191.5	0.0%
Std afv	687.8	687.0	-0.1%	46.1	46.1	-0.1%	47.9	47.9	-0.1%	47.9	47.8	-0.2%
5 pct	2823.0	2797.3	-0.9%	189.3	187.5	-0.9%	153.9	152.8	-0.7%	124.6	124.0	-0.5%
10 pct	2998.3	2985.0	-0.4%	201.0	200.1	-0.4%	165.8	165.1	-0.4%	135.9	135.6	-0.3%
25 pct	3324.2	3327.0	0.1%	222.9	223.1	0.1%	187.8	188.0	0.1%	157.3	157.4	0.0%
50 pct	3740.3	3753.2	0.3%	250.8	251.6	0.3%	216.5	217.0	0.3%	185.4	185.8	0.2%
75 pct	4222.7	4234.0	0.3%	283.1	283.9	0.3%	250.0	250.6	0.2%	218.9	219.3	0.2%
90 pct	4719.9	4719.1	0.0%	316.4	316.4	0.0%	285.3	285.3	0.0%	254.7	254.6	0.0%

Tabel 2: Startalder 44 år. Startformue på 1629.7 tkr i øverste tilfælde og 1353.2 tkr i nederste tilfælde.

A Udregning af eksakt middelværdi og varians

Vi kan bestemme middelværdien af formuen igennem opsparingsperioden rekursivt ved at tage forventninger i (1), hvilket giver

$$\begin{aligned} M(t+1) &= I_{t+1} + M(t)\tau + \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t R_{t+1}\right](1-\tau) \\ &= I_{t+1} + M(t)\tau + e^{\mu(t+1)}M(t)(1-\tau) \\ &= I_{t+1} + M(t)\left[\tau + e^{\mu(t+1)}(1-\tau)\right], \quad t = t_0, t_0+1, \dots, T_R - 1, \end{aligned}$$

idet

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t R_{t+1}\right] &= \mathrm{E}_{t_0}\left[\mathrm{E}_t\left[W_t R_{t+1}\right]\right] = \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t\,\mathrm{E}_t\left[R_{t+1}\right]\right] \\ &= \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t e^{\mu(t+1)}\right] = e^{\mu(t+1)}\,\mathrm{E}_{t_0}\left[W_t\right] = e^{\mu(t+1)}M(t) \end{aligned}$$

ved brug af loven om itererede forventninger. I udbetalingsfasen tages forventninger i (4), hvilket på tilsvarende vis giver

$$\begin{aligned} M(t+1) &= M(t)\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right) + e^{\mu(t+1)}M(t)e^{\nu(t+1)}(1-\tau) \\ &= M(t)\left(e^{\nu(t+1)}\left[\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right] - A(t)^{-1}\right), \quad t = T_R, T_R+1, \dots, T-2. \end{aligned}$$

Til beregning af variansen bruges den velkendte sammenhæng

$$V(t) = \mathrm{Var}_{t_0}[W_t] = \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right] - \left(\mathrm{E}_{t_0}[W_t]\right)^2 = \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right] - M(t)^2.$$

I indbetalingsfasen er

$$\begin{aligned} W_{t+1}^2 &= \left(I_{t+1} + W_t\tau + W_t R_{t+1}(1-\tau)\right)^2 \\ &= I_{t+1}^2 + W_t^2\tau^2 + W_t^2 R_{t+1}^2(1-\tau)^2 + 2\tau W_t I_{t+1} \\ &\quad + 2(1-\tau)I_{t+1}W_t R_{t+1} + 2\tau(1-\tau)W_t^2 R_{t+1} \end{aligned}$$

og ved at tage forventninger fås

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{t_0}\left[W_{t+1}^2\right] &= I_{t+1}^2 + \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right]\tau^2 + \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2 R_{t+1}^2\right](1-\tau)^2 + 2\tau I_{t+1}\,\mathrm{E}_{t_0}\left[W_t\right] \\ &\quad + 2(1-\tau)I_{t+1}\,\mathrm{E}_{t_0}\left[W_t R_{t+1}\right] + 2\tau(1-\tau)\,\mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2 R_{t+1}\right] \\ &= I_{t+1}^2 + \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right]\tau^2 + \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right]e^{2\mu(t+1)+\sigma^2(t+1)}(1-\tau)^2 + 2\tau I_{t+1}M(t) \\ &\quad + 2(1-\tau)I_{t+1}e^{\mu(t+1)}M(t) + 2\tau(1-\tau)e^{\mu(t+1)}\,\mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right] \\ &= I_{t+1}^2 + 2I_{t+1}M(t)\left(\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right) \\ &\quad + \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right]\left(\tau^2 + (1-\tau)^2 e^{2\mu(t+1)+\sigma^2(t+1)} + 2\tau(1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right) \\ &= I_{t+1}^2 + 2I_{t+1}M(t)\left(\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right) \\ &\quad + \left(V(t) + M(t)^2\right)\left(\tau^2 + (1-\tau)^2 e^{2\mu(t+1)+\sigma^2(t+1)} + 2\tau(1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right), \end{aligned}$$

hvor loven om itererede forventninger igen er anvendt. Dermed bliver

$$
\begin{aligned}
V(t+1) = \mathrm{E}_{t_0}\left[W_{t+1}^2\right] - M(t+1)^2 &= \mathrm{E}_{t_0}\left[W_{t+1}^2\right] - \left(I_{t+1} + M(t)\left[\tau + (1-\tau)\, e^{\mu(t+1)}\right]\right)^2 \\
&= \left(V(t) + M(t)^2\right)\left(\tau^2 + (1-\tau)^2 e^{2\mu(t+1)+\sigma^2(t+1)} + 2\tau(1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right) \\
&\quad - M(t)^2\left[\tau + (1-\tau)\, e^{\mu(t+1)}\right]^2 \\
&= \left(V(t) + M(t)^2\right)\left(\left[\tau + (1-\tau)\, e^{\mu(t+1)}\right]^2 + (1-\tau)^2 e^{2\mu(t+1)}\left(e^{\sigma^2(t+1)} - 1\right)\right) \\
&\quad - M(t)^2\left[\tau + (1-\tau)\, e^{\mu(t+1)}\right]^2 \\
&= V(t)\left(\tau + (1-\tau)\, e^{\mu(t+1)}\right)^2 + (1-\tau)^2\left(V(t) + M(t)^2\right) e^{2\mu(t+1)}\left(e^{\sigma^2(t+1)} - 1\right).
\end{aligned}
$$

I udbetalingsfasen er

$$
\begin{aligned}
W_{t+1}^2 = W_t^2\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right)^2 &+ W_t^2 R_{t+1}^2 e^{2\nu(t+1)}\,(1-\tau)^2 \\
&+ 2W_t^2 R_{t+1} e^{\nu(t+1)}\,(1-\tau)\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right),
\end{aligned}
$$

og ved at tage forventninger fås

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t_0}\left[W_{t+1}^2\right] = \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right]\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right)^2 &+ \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2 R_{t+1}^2\right] e^{2\nu(t+1)}\,(1-\tau)^2 \\
&+ 2\,\mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2 R_{t+1}\right] e^{\nu(t+1)}\,(1-\tau)\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right) \\
&= \mathrm{E}_{t_0}\left[W_t^2\right]\Big\{\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right)^2 + e^{2\mu(t+1)+\sigma^2(t+1)+2\nu(t+1)}\,(1-\tau)^2 \\
&\qquad + 2e^{\mu(t+1)+\nu(t+1)}\,(1-\tau)\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Dermed bliver

$$
\begin{aligned}
V(t+1) &= \mathrm{E}_{t_0}\left[W_{t+1}^2\right] - M(t+1)^2 \\
&= \mathrm{E}_{t_0}\left[W_{t+1}^2\right] - M(t)^2\left(e^{\nu(t+1)}\left[\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right] - A(t)^{-1}\right)^2 \\
&= \left(V(t) + M(t)^2\right)\Big\{\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right)^2 + e^{2\mu(t+1)+\sigma^2(t+1)+2\nu(t+1)}\,(1-\tau)^2 \\
&\qquad + 2e^{\mu(t+1)+\nu(t+1)}\,(1-\tau)\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1}\right)\Big\} \\
&\quad - M(t)^2\left(e^{\nu(t+1)}\left[\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right] - A(t)^{-1}\right)^2 \\
&= \left(V(t) + M(t)^2\right)\Big\{\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1} + (1-\tau)e^{\mu(t+1)+\nu(t+1)}\right)^2 \\
&\qquad + (1-\tau)^2 e^{2\mu(t+1)+2\nu(t+1)}\left(e^{\sigma^2(t+1)} - 1\right)\Big\} \\
&\quad - M(t)^2\left(e^{\nu(t+1)}\left[\tau + (1-\tau)e^{\mu(t+1)}\right] - A(t)^{-1}\right)^2 \\
&= V(t)\left(e^{\nu(t+1)}\tau - A(t)^{-1} + (1-\tau)e^{\mu(t+1)+\nu(t+1)}\right)^2 \\
&\quad + (1-\tau)^2\left(V(t) + M(t)^2\right) e^{2\mu(t+1)+2\nu(t+1)}\left(e^{\sigma^2(t+1)} - 1\right).
\end{aligned}
$$